mathematica.gr

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΪΟΥ 2013

Λύσεις

των

θεμάτων

Έκδοση 1η (21/05/2013, 14 : 00)

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς
των Επιμελητών του Δικτυακού Τόπου

mathematica.gr

με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=46&t=37116

Συνεργάστηκαν οι:
Στράτης Αντωνέας, Ανδρέας Βαρβεράκης, Βασίλης Κακαβάς,
Γιώργης Καλαθάκης, Φωτεινή Καλδή, Σπύρος Καρδαμίτσης,
Νίκος Κατσίπης, Στάθης Κούτρας, Χρήστος Κυριαζής,
Γρηγόρης Κωστάκος, Δημήτρης Ιωάννου, Βαγγέλης Μουρούκος,
Ροδόλφος Μπόρης, Μίλτος Παπαγρηγοράκης, Λευτέρης Πρωτοπαπάς,
Γιώργος Ρίζος, Μπάμπης Στεργίου, Σωτήρης Στόγιας,
Αλέξανδρος Συγκελάκης, Αχιλλέας Συνεφακόπουλος, Χρήστος Τσιφάκης,
Κώστας Τηλέγραφος, Σωτήρης Χασάπης,

Το **Δελτίο** διατίθεται ελεύθερα
από το δικτυακό τόπο **mathematica.gr**

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΪΟΥ 2013

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0\in A$;

Μονάδες 4

Α3. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}, x\neq 0$ ισχύει ότι $f'(x)=\frac{1}{x^2}$ (μονάδες 2)

β) Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$ (μονάδες 2)

γ) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής. (μονάδες 2)

δ) Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις. (μονάδες 2)

ε) Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω με $A\subseteq B$, ισχύει ότι $P(A)>P(B)$. (μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α1. Η απόδειξη βρίσκεται στη σελίδα 28 του σχολικού βιβλίου.

Α2. Ο ορισμός βρίσκεται στη σελίδα 14 του σχολικού βιβλίου.

Α3. Ο ορισμός βρίσκεται στη σελίδα 87 του σχολικού βιβλίου.

Α4.
α) **Λ**
β) **Σ**
γ) **Λ**
δ) **Λ**
ε) **Λ**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$ και τα ενδεχόμενα $A=\{\omega_1,\omega_4\}$ και $B=\{\omega_1,\omega_3\}$

Για τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων $\{\omega_1\}$ και $\{\omega_3\}$ του Ω ισχύει ότι:

- $P(\omega_1)=-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}$
- Η $P(\omega_3)$ είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της $f(x)$ ως προς x, όταν $x=1$,

  όπου $f(x)=\frac{x}{3}\cdot\ln x,\ x>0$

B1. Να αποδείξετε ότι $P(\omega_1)=\frac{1}{4}$ και $P(\omega_3)=\frac{1}{3}$

Μονάδες 10

B2. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{3}\le P(A')\le\frac{3}{4}$, όπου A' το συμπληρωματικό του A.

Μονάδες 7

B3. Αν $P(A')=\frac{3}{4}$, τότε να βρείτε τις πιθανότητες $P(\omega_2),P(\omega_4),P[(A-B)\cup(B-\alpha)]$ και $P(A'-B')$,

όπου B' το συμπληρωματικό του B.

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ:

B1. Η συνάρτηση $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}$, ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία

$$x^2+x+1>0 \quad \text{και} \quad x^3+x^2\neq 0$$

Όμως $x^2+x+1>0$ για κάθε $x\in \mathrm{IR}$ διότι $\Delta=-3<0$ και $\alpha=1>0$, κι ακόμα

$$x^3+x^2\neq 0 \Leftrightarrow x^2(x+1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0 \text{ και } x\neq -1\ .$$

Επομένως η συνάρτηση ορίζεται στο σύνολο $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$, οπότε το ζητούμενο όριο έχει νόημα.

Ο υπολογισμός του ορίου οδηγεί σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(\sqrt{x^2+x+1}-1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)}{(x^3+x^2)(\sqrt{x^2+x+1}+1)}=$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(\sqrt{x^2+x+1})^2-1^2}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x+1-1}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x(\sqrt{x^2+x+1}+1)}=$$

$$=\frac{1}{-1(\sqrt{1-1+1}+1)}=-\frac{1}{2}$$

Άρα $P(\omega_1)=-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

Η συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{3}\cdot\ln x$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων με τύπους $\frac{x}{3}$ (πολυωνυμική) και $\ln x$, με

$$f'(x)=\left(\frac{x}{3}\cdot\ln x\right)'=\left(\frac{x}{3}\right)'\cdot\ln x+\frac{x}{3}\cdot(\ln x)'=\frac{1}{3}\ln x+\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{3}(\ln x+1).$$

Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f υπολογισμένος στο $x=1$ είναι η παράγωγος της συνάρτησης στο $x=1$.

Άρα $P(\omega_3)=f'(1)=\frac{1}{3}(\ln 1+1)=\frac{1}{3}(0+1)=\frac{1}{3}$

B2. Το συμπληρωματικό A' του ενδεχόμενου A είναι $A'=\{\omega_2,\omega_3\}$ και

$$P(A')=P(\omega_2)+P(\omega_3)=P(\omega_2)+\frac{1}{3}$$

Έχουμε

$$P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=1 \quad\Rightarrow\ \frac{1}{4}+P(\omega_2)+\frac{1}{3}+P(\omega_4)=1$$

$$\Rightarrow\ P(\omega_2)+P(\omega_4)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$$

Άρα $P(\omega_2)=\frac{5}{12}-P(\omega_4)\le\frac{5}{12}$ αφού $P(\omega_4)\ge 0$

Επομένως,

$$0\le P(\omega_2)\le\frac{5}{12}\ \Rightarrow\ \frac{1}{3}\le P(\omega_2)+\frac{1}{3}\le\frac{5}{12}+\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ \frac{1}{3}\le P(A')\le\frac{9}{12}\ \Rightarrow\ \frac{1}{3}\le P(A')\le\frac{3}{4}$$

B3.

Είναι

$$P(A')=\frac{3}{4}\Rightarrow P(A)=\frac{1}{4}\Rightarrow\ P(\omega_1)+P(\omega_4)=\frac{1}{4}\Rightarrow\ P(\omega_4)=0$$

Ακόμα

$$P(\omega_2)=1-P(\omega_1)-P(\omega_3)-P(\omega_4)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-0=\frac{5}{12}$$

$$P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P\left(\{\omega_4\}\cup\{\omega_3\}\right)=0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

Είναι $A'=\{\omega_2,\omega_3\}, B'=\{\omega_2,\omega_4\}$, συνεπώς $A'-B'=\{\omega_3\}$, άρα

$$P\left(A'-B'\right)=P\left(\omega_3\right)=\frac{1}{3}$$

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα ν παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής X, τις οποίες ομαδοποιούμε σε 4 ισοπλατείς κλάσεις.

Δίνεται ότι:

- η μικρότερη παρατήρηση είναι 50
- η κεντρική τιμή της τέταρτης κλάσης είναι $x_4 = 85$
- η σχετική συχνότητα της τέταρτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της τρίτης κλάσης
- η διάμεσος των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\delta = 75$

και

- η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{x} = 74$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος είναι $c = 10$

Μονάδες 4

Γ2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συμπληρωμένο σωστά

Κλάσεις	**Κεντρικές τιμές** x_i	**Σχετική Συχνότητα** f_i
[. , .)		
[. , .)		
[. , .)		
[. , .)		
Σύνολο		

Μονάδες 8

Γ3. Δίνεται ότι $f_i = 0{,}1$, $f_2 = 0{,}3$, $f_3 = 0{,}2$ και $f_4 = 0{,}4$

Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων, που είναι μικρότερες του 80, είναι $\frac{200}{3}$

Μονάδες 7

Γ4. Επιλέγουμε κ παρατηρήσεις του αρχικού δείγματος με $\kappa < \nu$, οι οποίες ακολουθούν κανονική κατανομή με

- το $2{,}5\%$ των παρατηρήσεων αυτών να είναι τουλάχιστον 74
- το 16% των παρατηρήσεων αυτών να είναι το πολύ 68

Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων αυτών καθώς και να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων αυτών είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ:

Γ1. Η μικρότερη παρατήρηση είναι $t_{min} = 50$ και $x_4 = 85$ η κεντρική τιμή της 4ης κλάσης.
Αν θεωρήσουμε c το πλάτος της κάθε κλάσης τότε είναι

$$50 + c + c + c + \frac{c}{2} = 85 \Leftrightarrow 50 + 3c + \frac{c}{2} = 85 \Leftrightarrow 50 + \frac{7c}{2} = 85 \Leftrightarrow c = 10$$

Γ2. Ισχύει ότι $f_4 = 2f_3$ (1) και $\delta = 75$ συνεπώς $f_1\% + f_2\% + \frac{f_3\%}{2} = 50\%$ ή $f_1 + f_2 + \frac{f_3}{2} = 0{,}5$ (2)

Επιπλέον $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1$ (3).

Τότε $(3) - (2) \Leftrightarrow \frac{f_3}{2} + f_4 = 0{,}5$ (4).

Η (4) $\overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{f_3}{2} + 2f_3 = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{5f_3}{2} = 0{,}5 \Leftrightarrow$ $\mathbf{f_3 = 0{,}2}$

Τότε, λόγω της (1), $\mathbf{f_4 = 0{,}4}$

Άρα η (2) γράφεται $\mathbf{f_1 + f_2 = 0{,}4}$ (5)

Καθώς η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{x} = 74$, ισχύει

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} \Leftrightarrow 74 = \sum x_i f_i \Leftrightarrow 74 = 55 \cdot f_1 + 65 \cdot f_2 + 75 \cdot f_3 + 85 \cdot f_4$$

$$\Leftrightarrow 74 = 55 \cdot f_1 + 65 \cdot f_2 + 75 \cdot 0{,}2 + 85 \cdot 0{,}4$$

$$\Leftrightarrow 74 = 55 \cdot f_1 + 65 \cdot f_2 + 15 + 34$$

$$\Leftrightarrow 25 = 55 \cdot f_1 + 65 \cdot f_2 \quad (6)$$

Η (6) $\overset{(5)}{\Rightarrow} 25 = 55 \cdot (0{,}4 - f_2) + 65 \cdot f_2 \Leftrightarrow 25 = 22 - 55 \cdot f_2 + 65 \cdot f_2$

$\Leftrightarrow 3 = 10 \cdot f_2 \Leftrightarrow$ $\mathbf{f_2 = 0{,}3}$ άρα από (5) $\mathbf{f_1 = 0{,}1}$

Κλάσεις	**Κεντρικές τιμές x_i**	**Σχετική Συχνότητα f_i**
[50, 60)	55	0,1
[60, 70)	65	0,3
[70, 80)	75	0,2
[80, 90)	85	0,4
Σύνολο		1

Γ3. Αν $\bar{x}_A$ είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 80 και $\bar{x}_B$ η μέση τιμή των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες του 80 και αντίστοιχα v_A το πλήθος των παρατηρήσεων μέχρι 80 και v_B το πλήθος από 80 έως 90 θα ισχύει

$\dfrac{\bar{x}_A v_A + \bar{x}_B v_B}{v_A + v_B} = 74$ ή $\dfrac{\bar{x}_A v_A + \bar{x}_B v_B}{v} = 74$ ή $\bar{x}_A \dfrac{v_A}{v} + \bar{x}_B \dfrac{v_B}{v} = 74$

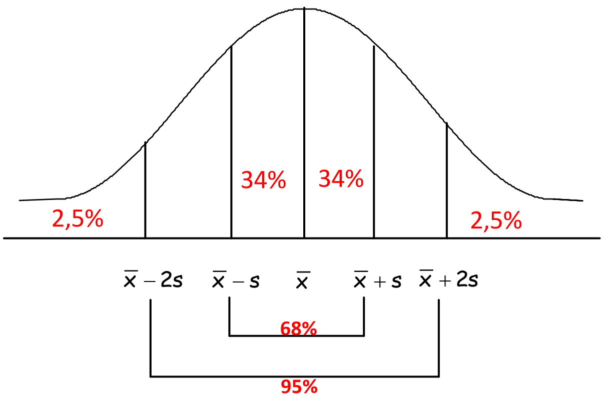
ή $\bar{x}_A f_A + \bar{x}_B f_B = 74$ ή $\bar{x}_A (f_1 + f_2 + f_3) + \bar{x}_B \cdot 0{,}4 = 74$

ή $\bar{x}_A \cdot 0{,}6 + \bar{x}_B \cdot 0{,}4 = 74$

και αφού η τιμή $\bar{x}_B = 85$ είναι κεντρική τιμή της 4ης κλάσης θα είναι

$$\bar{x}_A \cdot 0{,}6 + 85 \cdot 0{,}4 = 74 \Leftrightarrow 6\bar{x}_A = 740 - 340 \Leftrightarrow \bar{x}_A = \frac{400}{6} \Leftrightarrow \bar{x}_A = \frac{200}{3}.$$

Γ4. Σε μια κανονική κατανομή τα ποσοστά κατανέμονται ως εξής



Στο διάστημα $(\bar{x}-2s, \bar{x}+2s)$ βρίσκεται το 95% των παρατηρήσεων συνεπώς το υπόλοιπο 5% των παρατηρήσεων είναι μοιρσμένο σε κάθε ένα από τα διαστήματα έξω από το παραπάνω διάστημα. Άρα 2,5% των παρατηρήσεων βρίσκεται πάνω από τη χαρακτηριστική τιμή $\bar{x}+2s$ συνεπώς

$$\bar{x} + 2s = 74 \qquad (1)$$

Επίσης στο διάστημα $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$ βρίσκεται το 68% των παρατηρήσεων συνεπώς το υπόλοιπο 32% των παρατηρήσεων είναι μοιρασμένο σε κάθε ένα από τα διαστήματα που βρίσκονται έξω από το παραπάνω διάστημα. Άρα 16% των παρατηρήσεων βρίσκεται κάτω από τη χαρακτηριστική τιμή $\bar{x}+s$ συνεπώς

$$\bar{x} - s = 68 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2), προκύπτει $3s = 6 \Leftrightarrow$ $\mathbf{s = 2}$ και $\mathbf{\bar{x} = 70}$

Το δείγμα ως προς την ομοιογένεια χαρακτηρίζεται από το συντελεστή μεταβολής που είναι

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{2}{70} = \frac{1}{35} < \frac{1}{10}.$$

Άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x\ln x+k,\ \ x>0$, όπου k ακέραιος με $k>1$ και την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(1,f(1))$, η οποία σχηματίζει με τους άξονες, τρίγωνο εμβαδού E, με $E<2$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $k=2$

Μονάδες 5

Δ2. Έστω $x_1,x_2,\dots,x_{50}$ οι τετμημένες 50 σημείων της (ε) των οποίων οι αντίστοιχες τεταγμένες τους έχουν μέση τιμή $\bar{y}=31$

α) Να αποδείξετε ότι $\bar{x}=30$ (μονάδες 2)

β) Για τις τετμημένες των παραπάνω σημείων θεωρούμε ότι :
Κάθε μία από τις τετμημένες $x_1,x_2,\dots,x_{20}$ αυξάνεται κατά 3, οι επόμενες 15 τετμημένες παραμένουν σταθερές και κάθε μία από τις υπόλοιπες ελαττώνεται κατά $\lambda\in\mathbb{R}$ με $\lambda>0$.

Να βρείτε το λ, ώστε η νέα μέση τιμή των τετμημένων να είναι ίση με 31. (μονάδες 4)

Μονάδες 6

Δ3. Αν $\frac{1}{e}<\alpha<\beta<\gamma<e$ με $\alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}\cdot\gamma^{\gamma}=e^{7}$, τότε να βρείτε το εύρος R και τη μέση τιμή των $f(\alpha),f(\beta),f(\gamma),f(e),f'\left(\frac{1}{e}\right)$, όπου $f(x)=x\ln x+2$

Μονάδες 7

Δ4. Θεωρούμε το δειγματικό χώρο

$$\Omega=\{t_n,n=1,2,3,\dots,30:0<t_1<t_2<\dots<t_{10}<\frac{1}{e}<t_{11}<\dots<t_{30}=1\}$$

με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, καθώς και τα ενδεχόμενα

$A=\{t\in\Omega$: η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\left(t,f(t)\right)$, να σχηματίζει με τον άξονα x'x οξεία γωνία $\}$

$B=\{t\in\Omega:f(t)>f'(t)+1\}$, όπου $f(t)=t\ln t+2$

Να βρεθούν οι πιθανότητες:

α) να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A (μονάδες 3)

β) να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα A και B (μονάδες 4)

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ:

Δ1. Η συνάρτηση με τύπο $x\cdot\ln x$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων με τύπους x (πολυωνυμική) και $\ln x$, επομένως η $f(x)=x\cdot\ln x+\kappa$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα των παραγωγίσιμων συναρτήσεων με τύπους $x\ln x$ και κ (σταθερά), με

$$f'(x)=\ln x+x\frac{1}{x}=\ln x+1.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y=\alpha x+\beta \text{ με } \alpha=f'(1)=\ln 1+1=1 \Rightarrow y=x+\beta$$

Επίσης $f(1)=1\cdot\ln 1+\kappa=\kappa$

Άρα το $(1,\kappa)$ είναι το σημείο επαφής το οποίο ανήκει στην ευθεία,

επομένως

$$\kappa=1+\beta \Leftrightarrow \beta=\kappa-1.$$

Άρα η εφαπτομένη είναι η $y=x+\kappa-1$

Θέτουμε στην (ε) όπου $y=0$ για να βρούμε το σημείο τομής A με τον άξονα $x'x$ και έχουμε

$$x=1-\kappa \text{, οπότε } A(1-\kappa,0).$$

Θέτουμε στην (ε) όπου $x=0$ για να βρούμε το σημείο τομής B με τον άξονα $y'y$ και έχουμε

$$y=\kappa-1 \text{, οπότε } B(\kappa-1,0).$$

$$E=(OAB)=\frac{OA\cdot OB}{2}=\frac{|1-\kappa|\,|\kappa-1|}{2}=\frac{(\kappa-1)^2}{2} \text{, αφού } \kappa>1.$$

Πρέπει

$$E<2 \Leftrightarrow \frac{(\kappa-1)^2}{2}<2 \Leftrightarrow \kappa^2-2\kappa-3<0 \Leftrightarrow -1<\kappa<3$$

και αφού $\kappa\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ έχουμε ότι $\kappa=2$.

Δ2.

α) Για $\kappa=2$ η ευθεία (ε) έχει εξίσωση $y=x+1$.

Αφού $\bar{y}=31 \Leftrightarrow \bar{x}+1=31 \Leftrightarrow \bar{x}=30$, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι για τις μεταβλητές X, Y και τη σταθερά c, με $Y=X+c$, ισχύει $\bar{y}=\bar{x}+c$.

β) Ισχύει

$$\bar{x}=30 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{50}x_i}{50}=30 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{50}x_i=1500.$$

Οι νέες τιμές είναι οι

$$x_1+3,x_2+3,\ldots,x_{20}+3,x_{21},x_{22},\ldots,x_{35},x_{36}-\lambda,x_{37}-\lambda,\ldots,x_{50}-\lambda,$$

και ορίζουν μια νέα μεταβλητή W, για την οποία θέλουμε $\bar{w}=31$.

Συνεπώς

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{i=1}^{50}w_i}{50}=31 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{50}w_i=1550\\ &\Leftrightarrow 1500+60-15\lambda=1550\\ &\Leftrightarrow -15\lambda=1550-1500-60\\ &\Leftrightarrow -15\lambda=-10 \Leftrightarrow \lambda=\frac{-10}{-15}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Δ3.

Έχουμε ότι $f'(x)=\ln x+1$.

Για κάθε $x>\frac{1}{e}\Rightarrow \ln x>-1\Rightarrow \ln x+1>0\Rightarrow f'(x)>0$

και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\frac{1}{e},+\infty)$.

Δηλαδή $\frac{1}{e}<\alpha<\beta<\gamma<e\Rightarrow f(\frac{1}{e})<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$

Αλλά $f(\frac{1}{e})=2-\frac{1}{e}>0$, ενώ $f'\left(\frac{1}{e}\right)=1+\ln\frac{1}{e}=0$.

απ' όπου προκύπτει ότι

$$f'\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e).$$

Συνεπώς το εύρος R είναι ίσο με $R=f(e)-f'\left(\frac{1}{e}\right)=f(e)=e+2$.

Αφού

$$\begin{aligned}\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\gamma^{\gamma}=e^{7} &\Leftrightarrow \ln(\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\gamma^{\gamma})=\ln e^{7}\\ &\Leftrightarrow \ln\alpha^{\alpha}+\ln\beta^{\beta}+\ln\gamma^{\gamma}=7\\ &\Leftrightarrow \alpha\cdot\ln\alpha+\beta\cdot\ln\beta+\gamma\cdot\ln\gamma=7\end{aligned}.$$

Η ζητούμενη μέση τιμή είναι ίση με

$$\frac{f'\left(\frac{1}{e}\right)+f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+f(e)}{5}=\frac{\alpha\cdot\ln\alpha+2+\beta\cdot\ln\beta+2+\gamma\cdot\ln\gamma+2+e+2}{5}=\frac{7+8+e}{5}=\frac{15+e}{5}.$$

Δ4.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα $x'x$ όταν

$$f'(t)>0\Leftrightarrow t>e^{-1}\text{, οπότε } t=t_{11},t_{12},\dots,t_{30} \text{ και κατά συνέπεια } A=\{t_{11},t_{12},\dots,t_{30}\}.$$

Επίσης για $t\in\Omega$, δηλαδή για $t<1$, έχουμε

$$\begin{aligned}f(t)>f'(t)+1 &\Leftrightarrow t\cdot\ln t+2>\ln t+1+1\\ &\Leftrightarrow t\cdot\ln t-\ln t>0\\ &\Leftrightarrow (t-1)\cdot\ln t>0\end{aligned}$$

που ισχύει για κάθε $t<1$, αφού για $t<1\Rightarrow\begin{cases}t-1<0\\ \ln t<\ln 1\Rightarrow \ln t<0\end{cases}$

Έτσι $B=\{t_1,t_2,\dots,t_{29}\}$.

α) $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$.

β) Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα A και B είναι το

$$A\cap B=\{t_{11},t_{12},\dots,t_{29}\},\quad \text{οπότε } P(A\cap B)=\frac{19}{30}.$$

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΛΥΣΕΙΣ:

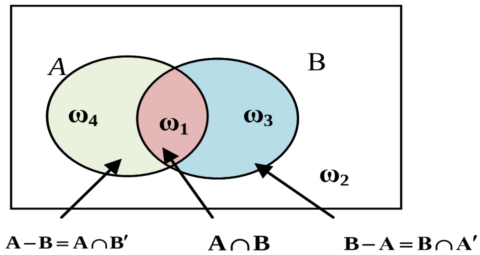
Β2.

2η ΛΥΣΗ:

Αρκεί να δείξω ότι

$$\frac{1}{3} \le P(A') \le \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le 1 - P(A) \le \frac{3}{4} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \le -P(A) \le -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le P(A) \le \frac{2}{3}$$

Έχουμε



Έτσι $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ και $P(B \cap A') = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3}$

Ισχύει ότι

$A \cap B \subseteq A$, οπότε $P(A \cap B) \le P(A) \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le P(A)$

Επίσης

$$P(AUB) \le 1 \Leftrightarrow P(A) + \underbrace{P(B) - P(A \cap B)}_{P(B \cap A') = \frac{1}{3}} \le 1 \Leftrightarrow$$

$$P(A) + \frac{1}{3} \le 1 \Leftrightarrow P(A) \le 1 - \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(A) \le \frac{2}{3}$$

3η ΛΥΣΗ:

Είναι

$$P(A) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_4\}) \ge P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4}$$

Επίσης

$$A \subset \Omega - \{\omega_3\} \Rightarrow P(A) \le P(\Omega - \{\omega_3\}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Συνεπώς

$$\frac{1}{4} \le P(A) \le \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3} \le -P(A) \le -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{3} \le 1 - P(A) \le \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{3} \le P(A') \le \frac{3}{4}$$

4η ΛΥΣΗ:

Είναι

$$\{\omega_3\} \subseteq A' \Rightarrow P(\omega_3) \le P(A') \Rightarrow P(A') \ge \frac{1}{3} \quad (1)$$

Όμοια

$$\{\omega_1\} \subseteq A \Rightarrow P(\omega_1) \le P(A) \Rightarrow P(A) \ge \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - P(A') \ge \frac{1}{4} \Rightarrow P(A') \le 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow P(A') \le \frac{3}{4} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1),(2) λαμβάνω το ζητούμενο: $\frac{1}{3} \le P(A^{'}) \le \frac{3}{4}$

Β3.

2η ΛΥΣΗ:

(Με κανόνες De morgan)

$$P\left(A'-B'\right)=P(A')-P(A'\cap B')=P(A')-P\left((A\cup B)'\right)=$$
$$=P(A')-(1-P(A\cup B))=1-P(A)-1+P(A\cup B)=$$
$$=P(A\cup B)-P(A)=P(\{\omega_1\}\cup\{\omega_4\}\cup\{\omega_3\})-P(\{\omega_1\}\cup\{\omega_4\})=$$
$$=P(\{\omega_3\})=\frac{1}{3}$$

Απόδειξη τύπου De Morgan

$$x\in A'\cap B' \Leftrightarrow x\in A' \text{ και } x\in B' \Leftrightarrow x\notin A \text{ και } x\notin B \Leftrightarrow x\notin A\cup B \Leftrightarrow x\in(A\cup B)'$$

3η ΛΥΣΗ:

Έχω

$$P(A^{'})=\frac{3}{4}\Rightarrow P(\omega_2)+P(\omega_3)=\frac{3}{4}\Rightarrow P(\omega_2)=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$$

Είναι

$$A-B=\{\omega_4\}$$
$$B-A=\{\omega_3\}$$

επομένως

$$\left(A-B\right)\cup\left(B-A\right)=\{\omega_3,\omega_4\}$$

και

$$P\left(\Omega\right)=1\Rightarrow P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=1\Rightarrow P(\omega_4)=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{5}{12}=0\Rightarrow P(\omega_4)=0$$

Συνεπώς

$$P\left[\left(A-B\right)\cup\left(B-A\right)\right]=P(\omega_3)+P(\omega_4)=\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}$$

Γ1.

2η ΛΥΣΗ:

Η 1η κλάση θα είναι $[50,50+c)$

η 2η κλάση .... $[50+c,50+2c)$

η 3η κλάση .... $[50+2c,50+3c)$

η 4η κλάση .... $[50+3c,50+4c)$

Οπότε $x_4=85\Rightarrow\frac{(50+3c)+(50+4c)}{2}=85\Rightarrow c=10$.

3η ΛΥΣΗ:

Το πλάτος c κάθε κλάσης δίνεται από την σχέση $c=\frac{R}{4}$, όπου R το εύρος και 4 ο αριθμός των κλάσεων.

Τότε $R=t_m-50$ οπου t_m είναι η μεγαλύτερη παρατήρηση.

Ως μεγαλύτερη παρατήρηση θωρούμε το άθροισμα της κεντρικής τιμής της 4ης (δηλαδή της τελευταίας κλάσης) $x_4 = 85$ συν το $\frac{c}{2}$, ώστε στο πολύγωνο συχνοτήτων το εμβαδό κάθε ορθογωνίου να παριστάνει το $\nu_i x_i$.

Έτσι βρίσκουμε $c = \dfrac{85 + \frac{c}{2} - 50}{4}$. Λύνοντας την πρωτοβάθμια εξίσωση έχουμε $c = 10$.

Γ2.

2η ΛΥΣΗ:

Αν Α,Β σημεία του πολυγώνου αθροιστικων συχνοτητων με $A(70,\ F_2)$, $B(80, F_3)$ τότε το σημείο $M(75,50)$ είναι σημείο της ΑΒ οπότε από το θεώρημα του Θαλή είναι

$$\frac{AM}{AB} = \frac{75-70}{10} = \frac{50-100F_2}{100(F_3-F_2)} \text{ ή } \frac{1}{2}f_3 = \frac{1}{2} - f_1 - f_2$$

λύνοντας το σύστημα $\begin{cases} f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + = 1 \\ f_4 = 2f_3 \\ 55f_1 + 65f_2 + 75f_3 + 85f_4 = 74 \\ \frac{1}{2}f_3 = \frac{1}{2} - f_1 - f_2 \end{cases}$ βρίσκουμε τα f_i

Γ3.

2η ΛΥΣΗ:

Το $\bar{x}'$ των τριών πρώτων κλάσεων **δεν** δίνεται από τη σχέση $\bar{x}' = \sum_{i=1}^{3} x_i f_i$ καθώς για τις τρεις πρώτες σχετικές συχνότητες του αρχικού δείγματος f_1, f_2, f_3 ισχύει ότι

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0{,}6 \neq 1$$

Συνεπώς με αναγωγή στη μονάδα προκύπτει

$$f_1' = \frac{0{,}1}{0{,}6} = \frac{1}{6}, \quad f_2' = \frac{0{,}3}{0{,}6} = \frac{1}{2}, \quad f_3' = \frac{0{,}2}{0{,}6} = \frac{1}{3}.$$

Στην περίπτωση αυτή

$$\bar{x}' = \sum x_i f_i' = 55 \cdot \frac{1}{6} + 65 \cdot \frac{1}{2} + 75 \cdot \frac{1}{3} = \frac{55+195+150}{6} = \frac{400}{6} = \frac{200}{3}$$

3η ΛΥΣΗ:

Έστω $\bar{y}$ η ζητούμενη μέση τιμή

Έχουμε $\bar{y} = \dfrac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + x_3\nu_3}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}$

όμως $f_i = \dfrac{\nu_i}{\nu} \Rightarrow \nu_i = f_i \nu$

άρα $\bar{y} = \dfrac{x_1 f_1 \nu + x_2 f_2 \nu + x_3 f_3 \nu}{f_1\nu + f_2\nu + f_3\nu} = \dfrac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3}{f_1 + f_2 + f_3} \Rightarrow \bar{y} = \dfrac{200}{3}$

4η ΛΥΣΗ:

Το δείγμα κάτω από 80 είναι το $0,6$ του ν δηλαδή $0,6\nu$ άρα

$$\bar{y}=\frac{55\cdot\nu_1+65\cdot\nu_2+75\cdot\nu_3}{0,6\nu}\Rightarrow\bar{y}=\frac{1}{0,6}\cdot\left(\frac{55\cdot\nu_1}{\nu}+\frac{65\cdot\nu_2}{\nu}+\frac{75\cdot\nu_3}{\nu}\right)$$

$$\Rightarrow\bar{y}=\frac{1}{0,6}(55\cdot f_1+65\cdot f_2+75\cdot f_3)=\frac{1}{0,6}(55\cdot 0,1+65\cdot 0,3+75\cdot 0,2)$$

$$\Rightarrow\bar{y}=\frac{200}{3}$$

5η ΛΥΣΗ:

Οι νέες σχετικές συχνότητες θα είναι

$$f_1'=\frac{\nu_1}{\nu-\nu_4}=\frac{\frac{\nu_1}{\nu}}{\frac{\nu-\nu_4}{\nu}}=\frac{f_1}{1-f_4}=\frac{1}{6}$$

και όμοια $f_2'=\frac{f_2}{1-f_4}=\frac{1}{2}$, $f_3'=\frac{f_3}{1-f_4}=\frac{1}{3}$.

Οπότε, η νέα μέση τιμή είναι

$$\bar{x}'=x_1f_1'+x_2f_2'+x_3f_3'=\ldots=\frac{200}{3}$$

6η ΛΥΣΗ:

Έστω ν_i οι συχνότητες των κλάσεων, $i=1,2,3,4$, $\bar{X}$ η ζητούμενη μέση τιμή και ν το μέγεθος του δείγματος.

Τότε

$$\bar{X}=\frac{x_1\nu_1+x_2\nu_2+x_3\nu_3}{\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4}=\frac{x_1\nu_1+x_2\nu_2+x_3\nu_3}{\nu-\nu_4}=\frac{55\frac{\nu_1}{\nu}+65\frac{\nu_2}{\nu}+75\frac{\nu_3}{\nu}}{1-\frac{\nu_4}{\nu}}=$$

$$=\frac{55f_1+65f_2+75f_3}{1-f_4}=\frac{55\cdot\frac{1}{10}+65\cdot\frac{3}{10}+75\cdot\frac{2}{10}}{1-\frac{4}{10}}=\frac{400}{6}=\frac{200}{3}$$

Δ1. (...)

2η ΛΥΣΗ:

Για την εύρεση της εφαπτομένης

Η συνάρτηση με τύπο $x\cdot\ln x$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων με τύπους x (πολυωνυμική) και $\ln x$, επομένως η $f(x)=x\cdot\ln x+\kappa$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα των παραγωγίσιμων συναρτήσεων με τύπους $x\ln x$ και κ (σταθερά),

Επίσης

$$f(1)=\kappa \quad\text{και}\quad f'(1)=1,$$

οπότε η εφαπτομένη ϵ της C_f στο $A(1,f(1))$ έχει εξίσωση

$$y-\kappa=1(x-1)\Leftrightarrow y=x+\kappa-1,\qquad (\varepsilon)$$

(...)

Για τον υπολογισμό του κ

$$E<2 \Leftrightarrow \frac{(\kappa-1)^2}{2}<2 \Leftrightarrow (\kappa-1)^2<4 \Leftrightarrow |\kappa-1|<2 \Leftrightarrow -2<\kappa-1<2 \Leftrightarrow -1<\kappa<3 .$$

Δ3.

2η ΛΥΣΗ:

Έχουμε ότι

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1+\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1}$$

και

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow 1+\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x>-1 \Leftrightarrow x>e^{-1} .$$

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πινάκα μεταβολών της f και πρόσημου της f' .

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x) = \ln x + 1$			–	0	+	
f(x)			↘	0	↗	

Δικαιολόγηση των πρόσημων

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow 1+\ln x>0$$
$$\Leftrightarrow \ln x>-1 \Leftrightarrow x>e^{-1}$$

Συνεπώς η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{1}{e}\right]$, γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=\frac{1}{e}$, το $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}+2=2-\frac{1}{e}$.

Όμως $f\left(\frac{1}{e}\right)>0 \Leftrightarrow 2>\frac{1}{e} \Leftrightarrow 2e>1$ που ισχύει, άρα και η αρχική, οπότε $f\left(\frac{1}{e}\right)>0$.

Επίσης αφού η συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ και ισχύει $\frac{1}{e}<\alpha<\beta<\gamma<e$ προκύπτει

$$f\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e) \qquad (1) .$$

Επιπλέον $f'\left(\frac{1}{e}\right)=1+\ln\frac{1}{e}=0$ και $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}+2=-\frac{1}{e}+2>0$

οπότε η (1) γίνεται

$$0=f'\left(\frac{1}{e}\right)<f\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e),$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$f'\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e) .$$

Συνεπώς το εύρος R είναι ίσο με $R=f(e)-f'\left(\frac{1}{e}\right)=f(e)=e+2$.

ΣΧΟΛΙΑ:

Για το Α4

α) Λ (είναι $-\frac{1}{x^2}$ σελ. 29)

β) Σ (σελ. 31)

γ) Λ (χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση ποιοτικής μεταβλητής σελ.67)

δ) Λ (αντίθετα με τη μέση τιμή, που επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις, σελ. 87)

ε) Λ (ισχύει ότι $P(A) \leq P(B)$, σελ. 151)

Για το Γ1

Σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο σελίδα 72: *"Ξεκινώντας από την μικρότερη παρατήρηση, ή για πρακτικούς λόγους λίγο πιο κάτω από την μικρότερη παρατήρηση, και προσθέτοντα κάθε φορά το πλάτος c δημιουργούμε τις κ κλασεις."*, θεωρούμε για λόγους μαθηματικής ακρίβειας ότι δεν είναι αυτονόητο από την εκφώνηση του θέματος Γ: *"η μικρότερη παρατήρηση είναι 50"* ότι το αριστερό άκρο της πρώτης κλάσης είναι το 50, αλλά ότι είναι μία τιμή α με $α \leq 50$.

Για το Γ2

Παρά το ότι η εκφώνηση θα έπρεπε να ζητάει και όχι να υπονοεί τη δικαιολόγηση εύρεσης της σχετικής συχνότητας, ωστόσο θεωρούμε ότι η συμπλήρωση της σχετικής συχνότητας θα πρέπει να δικαιολογηθεί από τους μαθητές σαν να μην υπήρχε το ερώτημα Γ3. Παλαιότερα η έλλειψη πλήρους δικαιολόγησης έδινε όλα τα μόρια στους μαθητές για σωστή συμπλήρωση στοιχείων του πίνακα των οποίων όμως η εύρεση ήταν άμεση από τα δεδομένα του προβλήματος. Στα παρόντα θέματα δε συμβαίνει κάτι τέτοιο και η άμεση συμπλήρωση του πίνακα απαιτεί σύνθετους αλγεβρικούς συλλογισμούς.