ΥΠΟΨΗΦΙΑ ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ 2013

Εισαγωγή

Μέσα Μαΐου και ο πυρετός των Πανελλαδικών όλο και ανεβαίνει! Οι μαθητές ξεκοκαλίζουν τα βιβλία για να ανακαλύψουν δύσκολα θέματα διαφορετικά από αυτά που κυκλοφορούν και έλυσαν σε όλη την διάρκεια της χρονιάς. Οι «Ροβινσώνες» ψάχνουν από blog σε blog και από διαγώνισμα σε διαγώνισμα διαφορετικές ιδέες πριν κληθούν να αντιμετωπίσουν τα επίσημα θέματα της ΚΕΕ για να μειώσουν την ανασφάλειά τους και να τονώσουν το ηθικό τους. Οι καθηγητές βυθισμένοι στο άγχος αν πρόλαβαν τελικά να διδάξουν όλα στους μαθητές τους, αν ξέχασαν κάποια κατηγορία ασκήσεων, αν δίδαξαν όλες τις ασκήσεις του βιβλίου και αν είναι ικανοί οι μαθητές τους να γράψουν τις πολύτιμες 25 μονάδες της θεωρίας.

Εγώ τους εύχομαι καλή επιτυχία και τους προτείνω να πιστέψουν στον εαυτό τους, ξεχνούν ότι ο καλύτερος τρόπος αντιμετώπισης μίας άσκησης είναι η εμπιστοσύνη και αυτοπεποίθηση που πρέπει να νιώθουν πριν κληθούν να την λύσουν, το σκεπτικό «μπορώ να την λύσω», «είμαι ικανός να την λύσω», «έχω διαβάσει» είναι προτιμότερο από το ηττοπαθές «δεν μπορώ να την λύσω», « κάποιο λάθος έχει η άσκηση», «είμαι αδιάβαστος τελικά», «δεν είμαι ικανός» κτλ.

Επιμέλεια: Χατζόπουλος Μάκης

Θέμα 1ο

Δεδομένα	$z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ $f(x) = \lvert z_1 \cdot x + z_2 \rvert,\ x \in \mathbb{R}$
Ζητούμενα	α) Να δείξετε ότι: $f(x) - f(0) \ge f(0) - f(-x)$ β) Βρείτε την μονοτονία και τα ακρότατα της f γ) Αν η ασύμπτωτη της C_f στο $x \to +\infty$ διέρχεται από το σημείο $M(0, \lvert z_2 \rvert)$ να δείξετε ότι ο $w = z_1 \cdot \bar{z}_2$ είναι θετικός πραγματικός αριθμός. δ) Αν $z_1 = 1$ και $z_2 = i$ να δείξετε ότι $\int_0^x \frac{1}{f(t)} dt = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),\quad x \in \mathbb{R}$

Υπόδειξη

α) Αρκεί να δείξουμε ότι, $f(x) + f(-x) \ge 2f(0) = 2\lvert z_2 \rvert$, όμως από τριγωνική ανισότητα παίρνουμε, $f(x) + f(-x) = \lvert z_1 x + z_2 \rvert + \lvert -z_1 x + z_2 \rvert \ge \lvert z_1 x + z_2 - z_1 x + z_2 \rvert = 2\lvert z_2 \rvert$

β) Έχουμε, $f(x) = \lvert xz_1 + z_2 \rvert = \sqrt{\lvert xz_1 + z_2 \rvert^2} = \ldots = \sqrt{\lvert z_1 \rvert^2 x^2 + \left(\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2\right)x + \lvert z_2 \rvert^2}$ με παράγωγο … και ελάχιστο στο $x_0 = -2\,\mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$.

γ) Βρίσκουμε $\lambda=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=....=|z_1|$ και $\beta=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=....=\dfrac{z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1 z_2}{2|z_1|}$ άρα η ευθεία

$y=|z_1|x+\dfrac{z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1 z_2}{2|z_1|}$ για να διέρχεται από το σημείο $M\left(0,|z_2|\right)$ πρέπει...

δ) Θέτουμε $h(x)=\int_0^x \dfrac{1}{f(t)}dt$ και $k(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, θα δείξουμε ότι

- $h'(x)=k'(x)$ (άρα $h(x)=k(x)+c$
- c=0

Θέμα 2ο

Δεδομένα	$z_1,z_2\in\mathbb{C}^*$ $f(x)=\dfrac{2|z_1|^x+|z_2|^x}{|z_1|^x+2|z_2|^x}$, $x\in\mathbb{R}$
Ζητούμενα	α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2x^{2013}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0 ,1). β) Αν f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $|z_1|>|z_2|$ γ) Να αποδείξετε ότι η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $x\to+\infty$ και $-\infty$ για κάθε $z_1,z_2\in\mathbb{C}^*$. δ) Αν $w=\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\in\mathbb{I}$ τότε να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή.

Θέμα 3ο

Δεδομένα	f συνεχής στο [α, β] παραγωγισίμη στο (α, β) $f'(x)\le 4$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ $f(\beta)=\beta^2+4$ και $f(\alpha)=6\alpha-\alpha^2-1$
Ζητούμενα	α) Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α και β και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x)=4x$, $x\in\mathbb{R}$. β) Βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_e^{\frac{1}{e}}(fog)(x)dx$, όπου $g(x)=\dfrac{\ln x}{x^2+1}$ γ) Βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}(foh)(x)$, όπου $h(x)=x-\ln\left(e^x+\eta\mu^2 x\right)$

Θέμα 4ο

Δεδομένα	$f(x)=x+\sqrt{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$
Ζητούμενα	α)Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα γ) Βρείτε το σύνολο τιμών και τις ασύμπτωτες της f δ) Βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$ της f(x) ε) Να παρασταθεί γραφικά η f(x) και η $f^{-1}(x)$

Θέμα 5ο

Δεδομένα	μη μηδενικοί αριθμοί z, w $z^2+w^2=10i$ και $w^2+wz=6i$ $\frac{z}{w}>0$
Ζητούμενα	α) Να δείξετε ότι: $z=2w$ β) z = ; και w = ; γ) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [1, 2] με $f(x)>0$ για κάθε $x\in[1,2]$ και η παραγωγίσιμη στο διάστημα [1, 2] συνάρτηση $g(x)=\left\|z^{2011}\cdot\int_1^x\frac{f(t)}{2^{2011}}dt+w^{2011}\cdot\int_2^x f(t)dt\right\|,\ x\in[1,2]$, i. Να δείξετε ότι η C_g έχει ένα τουλάχιστον σημείο στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x'x ii. Να δείξετε ότι η g έχει μέγιστο στο οποίο και να βρείτε.

Υπόδειξη

α) Θέτουμε $\frac{z}{w}=p>0\Leftrightarrow z=pw$ τον θετικό πραγματικό αριθμό και τον αντικαθιστούμε δεδομένες σχέσεις. Βρίσκουμε ρ = 2 που είναι δεκτή και ρ = - 1/3 που απορρίπτεται.

β) Αντικαθιστούμε σε μια από τις δεδομένες σχέσεις το $z=2w$ και βάζουμε $w=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$. Μετά από πράξεις βρίσκουμε: $\{z=2+2i \text{ και } w=1+i\}$ ή $\{z=-2-2i \text{ και } w=-1-i\}$ που είναι δεκτές και οι δύο λύσεις.

γ) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για την συνάρτηση g στο διάστημα [1, 2].

δ) Εφαρμόζουμε την τριγωνική ανισότητα και τον ορισμό του μεγίστου, προσέχουμε

$\int_1^x f(t)dt\ge 0$ και $\int_2^x f(t)dt\le 0$

Θέμα 6ο

Δεδομένα	$f(x)=\dfrac{42x}{\sqrt{x^2+16}+\sqrt{x^2+9}},\ x\in\mathbb{R}$
Ζητούμενα	α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f β) Βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f γ) Βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\displaystyle\int_0^{x+\frac{1}{7}} f(t)dt-\int_0^x f(t)dt\right]$ δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον x'x την ευθεία x = 3.

Υπόδειξη

α) Έχει μόνο οριζόντια ασύμπτωτη της y = 21 όταν $x\to+\infty$ και την y = -21 όταν $x\to-\infty$

β) Αποδεικνύεται εύκολα ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο π.ο της. Αν πάρουμε τα όρια στα άκρα του πεδίου ορισμού (που το έχουμε έτοιμο από το προηγούμενο ερώτημα) βρίσκουμε σύνολο τιμών: $f(A)=(-21,21)$

γ) Θέτουμε συνάρτηση $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ άρα αναζητούμε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g\left(x+\frac{1}{7}\right)-g(x)\right]$ που γίνεται

$$\lim_{x\to+\infty}\left[g\left(x+\frac{1}{7}\right)-g(x)\right]=\frac{1}{7}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{g\left(x+\frac{1}{7}\right)-g(x)}{x+\frac{1}{7}-x}\right]$$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης τιμής

για την συνάρτηση g στο διάστημα $\left(x,x+\frac{1}{7}\right)$

δ) Είναι $f(x)\geq 0$ και η C_f τέμνει τον άξονα x'x στο x=0) άρα πρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα,

$\int_0^3 \frac{42x}{\sqrt{x^2+16}+\sqrt{x^2+9}}dx$ που συζυγή παράσταση υπολογίζεται εύκολα και βρίσκουμε αποτέλεσμα

$140-108\sqrt{2}$ τ.μ.

Θέμα 7ο

Δεδομένα	z_1 και z_2 διαφορετικοί του μηδενός $(z_1+z_2)^{2013}=(z_1-z_2)^{2013}$ $f(x)=\lvert xz_1+z_2\rvert,\ x\in\mathbb{R}$
Ζητούμενα	Να δείξετε ότι: α) $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=0$ β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να την υπολογίσετε γ) Υπάρχει $x_0\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=3x_0^2-1$ δ) Η f έχει ελάχιστο το $\lvert z_2\rvert$

Υπόδειξη

α) Παίρνουμε τα μέτρα της δοσμένης σχέσης του μιγαδικού και αφού διώξουμε τους κοινούς εκθέτες υψώνουμε στο τετράγωνο και καταλήγουμε στην σχέση: $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=0\Leftrightarrow\frac{z_1}{z_2}+\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=0$....

β) Έχουμε, $f(x)=\lvert xz_1+z_2\rvert=\sqrt{\lvert xz_1+z_2\rvert^2}=\ldots=\sqrt{\lvert z_1\rvert^2x^2+\lvert z_2\rvert^2}$ με παράγωγο ...

γ) Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rolle για την συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^3+x$ στο διάστημα [-1, 1]

δ) Από το ερώτημα (β) έχουμε για κάθε πραγματικό αριθμό x,

$$f(x)=\lvert xz_1+z_2\rvert=\sqrt{\lvert z_1\rvert^2x^2+\lvert z_2\rvert^2}\ge\sqrt{0+\lvert z_2\rvert^2}=\lvert z_2\rvert=f(0)$$

Θέμα 8ο

Δεδομένα	$f''(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$ $0<f(0)<1$
Ζητούμενα	Να αποδείξετε ότι: α) Υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε, $f^2(x_0)=f(0)f(1)$ β) Η f στο [0, 1] έχει μέγιστο το f(1) γ) $\int_0^1 f(x)dx\le\frac{f(0)+f(1)}{2}$

Υπόδειξη

α) Θεώρημα Bolzano για την $g(x)=f^2(x)-f(0)f(1)$ στο [0, 1] β) Εφαρμόζουμε δύο φορές Θ.Μ.Τ στα διαστήματα $[0,x]$ και $[x,1]$ και κάποια στιγμή από την μονοτονία της

f' καταλήγουμε $f(x) \le f(0) + (f(1) - f(0))x,\ x \in [0,1]$ όμως το $x \le 1$ άρα παίρνουμε το ζητούμενο!

γ) Από την προηγούμενη ανισοτική σχέση έχουμε:

$0 \le f(0) + (f(1) - f(0))x - f(x),\ x \in [0,1]$

ολοκληρώνουμε κατά μέλη από το 0 έως το 1, σπάμε τα ολοκληρώματα και παίρνουμε το ζητούμενο.

Θέμα 9ο

Δεδομένα	$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ $f(x) = \int_0^{2x} \lvert z_1 t + z_2 \rvert dt,\quad x \in \mathbb{R}$ $f(x) \ge x$ για κάθε
Ζητούμενα	Να αποδείξετε ότι: α) $\lvert z_2 \rvert = \frac{1}{2}$ β) Η εξίσωση $f(x) = 2020$ έχει μια ακριβώς λύση στο διάστ $(0, +\infty)$ γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\int_0^x \left\lvert z_1 t + \frac{z_2}{2} \right\rvert dt \ge \frac{x}{4}$

<u>Υπόδειξη</u>

α) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Fermat για την συνάρτηση $g(x) = \int_0^{2x} \lvert z_1 t + z_2 \rvert dt - x \ge 0 = g(0)$

β) Παρατηρούμε ότι, $f'(x) = 2\lvert 2z_1 x + z_2 \rvert \ge 0$ άρα η ισότητα $f'(x) = 0$ ισχύει το πολύ για ένα x.

Επίσης, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ αφού $f(x) \ge x$, άρα το σύνολο τιμών είναι το , επομένως...

γ) Έχουμε, $f(x) = \int_0^{2x} \lvert z_1 t + z_2 \rvert dt \ge x \underset{\frac{1}{2}dt=du}{\overset{\frac{t}{2}=u}{\Longleftrightarrow}} \int_0^{x} \lvert z_1 2u + z_2 \rvert 2du \ge x \overset{u=t}{\Leftrightarrow} \int_0^x \left\lvert z_1 t + \frac{z_2}{2} \right\rvert dt \ge \frac{x}{4}$

Θέμα 10ο

Δεδομένα	$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(\lvert z\rvert-4)x^3+\left(\left\lvert w-z-\frac{4}{z}\right\rvert+5\right)x^2-2012x+2}{x^2-x+1}\right)=5$
Ζητούμενα	α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού z ανήκουν σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 4. β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού w ανήκουν σε έλλειψη, του οποίου οι εστίες είναι αντιδιαμετρικά σημεία στο κύκλο του ερωτήματος (α). γ) Λύστε την ανίσωση $\lvert w-\overline{w}\rvert \geq 6$, όπου $w = x+yi,\ x, y \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη

α) Αν $\lvert z\rvert-4\neq 0 \Leftrightarrow \lvert z\rvert\neq 4$ τότε το όριο γίνεται $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(\lvert z\rvert-4)x^3}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(\lvert z\rvert-4)x\right]=\begin{cases}+\infty & ,\lvert z\rvert>4\\ -\infty & ,\lvert z\rvert<4\end{cases}$

άτοπο αφού το όριο είναι 5, οπότε $\lvert z\rvert-4=0 \Leftrightarrow \lvert z\rvert=4$

β) Το όριο γίνεται,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\left\lvert w-z-\frac{4}{z}\right\rvert+5\right)x^2}{x^2}\right)=5 \Rightarrow \left\lvert w-z-\frac{4}{z}\right\rvert+5=5 \Rightarrow \left\lvert w-z-\frac{4}{z}\right\rvert=0 \Rightarrow w-z-\frac{4}{z}=0 \Rightarrow w=z+\frac{4}{z}$$

(που είναι άσκηση βιβλίου 9 /σελ. 102) και η έλλειψη είναι $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$...

γ) Η απόσταση $\lvert w-\overline{w}\rvert$ είναι παράλληλη στον άξονα y΄y, αφού οι εικόνες $w, \overline{w}$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα x΄x, οπότε γίνεται μέγιστη όταν ταυτιστεί με το μήκος του μικρού άξονα ΒΒ', δηλαδή όταν $\lvert w-\overline{w}\rvert$=2β δηλαδή $\lvert w-\overline{w}\rvert$=6, άρα x = 0 και y = 3.

Γενικά, $\lvert w-\overline{w}\rvert \leq 2\beta$.

Θέμα 11ο

Δεδομένα	$z=\alpha+\beta i$ συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=\int_1^{x^2+1}\lvert t\cdot z+z\rvert dt-3x+2$ f παρουσιάζει στο σημείο $x_0=1$ τοπικό ακρότατο
Ζητούμενα	α) Να αποδείξετε ότι $\lvert z\rvert=\frac{1}{2}$ β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού $w=2z-i$ στο μιγαδικό επίπεδο γ) Βρείτε τους μιγαδικούς w που έχουν μέγιστο και ελάχιστο μέτρο. δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 0 και x = 1.

Θέμα 12ο

Δεδομένα	$f(x)=(x^2+\alpha)\cdot e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$ η ευθεία $y=-2x+2$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης της f στο σημείο $M(0,f(0))$,
Ζητούμενα	α) Να αποδείξετε ότι : α =2 β) Να μελετήσετε την μονοτονία και τα ακρότατα της f γ) Να υπολογίσετε τα όρια: 1) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ και 2) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2013$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\mathbb{R}$

Θέμα 13ο

Δεδομένα	$f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+6$ με $x\in\mathbb{R}$ $g(x)=\frac{8}{x}$ με $x>0$
Ζητούμενα	α) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης της f στο σημείο $x_0=-2$ και στην συνέχεια να αποδείξετε ότι εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης g. β) Να αποδείξετε ότι και οι δύο γραφικές παραστάσεις βρίσκονται πιο πάνω από την παραπάνω κοινή εφαπτομένη τους. γ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και την παραπάνω εφαπτομένη.

Θέμα 14ο

Δεδομένα	f,g είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ $f'(x)-g'(x)=1$ και $f'(x)\neq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)+2}{f(x)-x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)$
Ζητούμενα	α) Να υπολογίστε το όριο L β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στο $+\infty$ γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$ δ) Να αποδείξετε ότι: $f(x)-g(x)=x+4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Θέμα 14ο

Δεδομένα	f, g είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ $f'(x) - g'(x) = 1$ και $f'(x) \neq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $L = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)+2}{f(x)-x-2} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$
Ζητούμενα	α) Να υπολογίστε το όριο L β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στο $+\infty$ γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$ δ) Να αποδείξετε ότι: $f(x) - g(x) = x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 15ο

Δεδομένα	$F(x) = \int_0^{2x-1} f(t)dt$ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-(x+1)^2}}$
Ζητούμενα	α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των δύο συναρτήσεων και την παράγωγο της συνάρτησης F β) Να αποδείξετε ότι $F(\eta\mu x) = x - \dfrac{\pi}{6}$ για κάθε $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=0 , $x = \sqrt{3} - 1$ είναι $\dfrac{\pi}{6}$ τετραγωνικές μονάδες. δ) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Θέμα 16ο

Δεδομένα	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ f παραγωγισίμη στο $\mathbb{R}$ η f έχει όριο στο $+\infty$ $f(x)+e^{f(x)}=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
Ζητούμενα	Να αποδείξετε ότι: α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ γ) Η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της δ) Η f έχει δεύτερη παράγωγο και είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$ ε) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 1 και $x=e+1$ είναι $E=\frac{3}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

Θέμα 17ο

Δεδομένα	συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(2x+1)-7}{x-1}=10$
Ζητούμενα	1) Να αποδείξετε ότι: α) $f(3)=7$ και β) $f'(3)=5$ 2) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(3,f(3))$ α) Να αποδείξετε ότι η (ε) έχει εξίσωση $y=5x-8$ β) Ένα σημείο Σ, που έχει τετμημένη μεγαλύτερη του 3, κινείται σε ευθεία (ε). Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι $2m/sec$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΜΣ.

Θέμα 18ο

1. Να δώσετε τον ορισμό της σύνθεσης συνάρτησης f με την g, τον τύπο, τον συμβολισμό και το πεδίο ορισμού της σύνθεσης	**<u>Απάντηση</u>**
2. Να δώσετε τον ορισμού σημείου καμπής της f στο x_0	**<u>Απάντηση</u>**
3. Αν $z_1 = \alpha + \beta i$ **και** $z_2 = \gamma + \delta i$ **όπου α, β, γ, δ πραγματικοί αριθμοί και** $\lvert\gamma\rvert + \lvert\delta\rvert \neq 0$ **τότε να δώσετε και να αποδείξετε τον τύπο της διαίρεσης δύο μιγαδικών αριθμών** $\frac{z_1}{z_2}$	**<u>Απάντηση</u>**
4. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α, β] και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$**, τότε** $f(x) \geq 0$ **για κάθε** $x \in [\alpha, \beta]$**.**	**Σωστό** **Λάθος**
5. Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ **τότε ισχύει ότι** $\lim_{x\to+\infty} f(x + e^{-x}) = 0$	**Σωστό** **Λάθος**

Θέμα 19ο

(1) Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ ; Ποια ονομάζουμε κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ; **(2) Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f** **(3) Έστω f μια ορισμένη συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ. τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ.**	

Θέμα 20ο

1. Τα πλευρικά όρια μιας συνάρτησης f, όταν το x παίρνει τιμές κοντά στο x_0, συμπίπτουν πάντοτε.	**Σ - Λ**
2. Αν μια συνάρτηση f έχει όριο στο σημείο x_0, τότε αυτό είναι μοναδικό.	**Σ - Λ**
3. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} \lvert f(x) \rvert = \lvert \ell \rvert$, $\ell \neq 0$, τότε πάντοτε ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.	**Σ - Λ**

4. Αν το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ είναι θετικός αριθμός, τότε η f παίρνει θετικές τιμές κοντά στο x_0.	**Σ - Λ**
5. Αν $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \beta$, $\lim\limits_{x \to \beta} g(x) = \gamma$ και $f(x) \neq \beta$ κοντά στο α, τότε $\lim\limits_{x \to \alpha} g(f(x)) = \gamma$.	**Σ - Λ**
6. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, α, β, γ, $\in$ R έχει πάντοτε λύση στο C.	**Σ - Λ**
7. Ισχύει πάντα $Re(z_1) + Re(z_2) = Re(z_1 + z_2)$.	**Σ - Λ**
8. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $\lvert -z \rvert = \lvert \bar{z} \rvert$.	**Σ - Λ**
9. Για κάθε $z_1, z_2 \in C$ ισχύει $\lvert z_1 + z_2 \rvert = \lvert z_1 \rvert + \lvert z_2 \rvert$.	**Σ - Λ**
10. Η εξίσωση $\lvert z - z_1 \rvert = \lvert z - z_2 \rvert$, $z \in C$, παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος που έχει άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$.	**Σ - Λ**
11. Η εξίσωση $\lvert z - z_1 \rvert = \lvert z - z_2 \rvert$ με άγνωστο το $z \in C$ και $z_1, z_2 \in C$ έχει μόνο μια λύση.	**Σ - Λ**
12. Η εξίσωση $\lvert z - z_0 \rvert = \rho$, $\rho > 0$ παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο κύκλο με κέντρο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ.	**Σ - Λ**