Μωραΐτης Στέλιος

1ο επαναληπτικό διαγώνισμα
μιγαδικοί – συναρτήσεις

όνομα :................................
ημερομηνία :......................

/100

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, $f(\alpha) \neq f(\beta)$ και η ένας αριθμός ανάμεσα στους $f(\alpha)$, $f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$. **(10 μονάδες)**

Β. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x^2 - 1} = 5$. Η τιμή $f(1)$ είναι ίση με:

α) 5 **β)** 0 **γ)** 10 **δ)** 2 **ε)** 3 **(3 μονάδες)**

Γ. Για μια συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\lim\limits_{h \to 0} f(3 + 2h) = 7$, το $f(3)$ είναι ίσο με:

α) 1 **β)** 3 **γ)** 2 **δ)** 5 **ε)** 7 **(3 μονάδες)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε τα παρακάτω, σημειώνοντας στο γραπτό σας το αντίστοιχο γράμμα Σ (σωστό) ή Λ (λάθος).

α) Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $(f(x))^2 = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. **(3 μονάδες)**

β) Αν η συνάρτηση $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και μη σταθερή, τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(f(\alpha), f(\beta))$. **(3 μονάδες)**

γ) Αν η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε ο αριθμός $\dfrac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της. **(3 μονάδες)**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$. με f γνησίως φθίνουσα

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f (3 μονάδες)

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} (5 μονάδες)

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=1$ (8 μονάδες)

δ) Αν z,w μιγαδικοί τέτοιοι ώστε να ισχύει $f^{-1}(0)+f^{-1}\left(\ln|z+\overline{w}|\right)=\dfrac{7}{6}$,

να αποδείξετε ότι: (9 μονάδες)

i) $|z+\overline{w}|=2$ ii) $|\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(w)|\leq 2$

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία και για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x-y)=f(x)-f(y)$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$. (3 μονάδες)

ii) Να αποδείξετε ότι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (6 μονάδες)

iii) Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το $x=0$, να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη. (8 μονάδες)

iv) Αν z,w δύο μιγαδικοί τέτοιοι ώστε $|z|=1$ και $w=\dfrac{z}{\overline{z}}-\dfrac{\overline{z}}{z}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι ο w είναι φανταστικός. (4 μονάδες)

β) Αν $f\left(\left|z+\dfrac{i}{z}\right|\right)+f(3)=f(5)$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w. (4 μονάδες)

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση f που είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο διάστημα $[0,1]$ και για την οποία ισχύει:

$$\left(f(0)\right)^2+\left(f(1)\right)^2+13=6f(0)+4f(1)$$

i) Να δείξετε ότι :

α) η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,1]$ **(8 μονάδες)**

β) υπάρχει μοναδικός $x_0\in(0,1)$ ώστε $\dfrac{f(x_0)}{x_0}=3$ **(9 μονάδες)**

ii) Αν η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, να λύσετε την ανίσωση

$$f\left(f^{-1}(x^3-3x+4)-1\right)>3$$ **(8 μονάδες)**